福井大学教育実践研究　2016，第41号，pp.93－104

実践報告・資料

数学的リテラシーを育む教材開発
― 数理ゲームによる４つの題材の提案 ―

福井大学大学院教育学研究科教科教育専攻　藤　田　康　介
福井大学大学院教育学研究科教科教育専攻　竹　内　俊　力
福井大学大学院教育学研究科教科教育専攻　土　田　恵　里
福井大学大学院教育学研究科教科教育専攻　間　庭　彰　郎
福井大学教育学部　西　村　保　三
福井大学教育学部　櫻　本　篤　司
福井大学大学院教育学研究科　風　間　寛　司

協働実践研究プロジェクト「数学的リテラシー」では，数学的リテラシーを育む教材を開発し，実践・省察することを目的とする。本稿では，数学的リテラシーの概略を述べ，PISA2012の結果を踏まえて，本プロジェクトで開発した数理ゲームを題材とした4つの教材について，授業実践の報告とその省察を行う。

キーワード：数学的リテラシー，教材開発，数理ゲーム

１. はじめに
1.1　数学的リテラシーと数学的プロセス

PISA 型カリキュラム開発「数学的リテラシー」の授業では，PISA が提唱する数学的リテラシーを育むための教材の研究と開発を行っている。この授業では，PISA 調査の示す結果をもとに日本の数学教育の現状と課題を見出し，それを改善するための方策として，PISA の提唱する数学的プロセスを基盤とする授業の研究と，子どもたちに興味・関心を抱かせるような題材の提案を行ってきた（前川ほか，2015）。この研究において我々が重視しているのは，現実と数学との結びつきや数学の有用性が実感できるような教材を開発することである。

「リテラシー」とは，元々識字を意味する語で，そこから転じて，読み書き・計算能力や，与えられた材料から必要な情報を引き出し，活用する能力の意味として使われている。これを PISA では,「知識の評価だけでなく，熟考する能力や知識や経験を現実世界の課題に応用する能力も含む，幅広い概念」として拡張的に捉え，数学的リテラシーを次のように定義している。

「様々な文脈の中で定式化し，数学を適用し，解釈する個人の能力であり，数学的に推論し，数学的な概念・手順・事実・ツールを使って事象を記述し，説明し，予測する能力を含む。これは，個人が世界において数学が果たす役割を認識し，建設的で積極的，思慮深い市民に必要な確固たる基礎に基づく判断と決定を下す助けとなるものである」（国立教育政策研究所，2012）。

PISA では，この定義に沿って，現実世界と数学の世界との往還を行う体系として図1のような「数学的プロセス」を提唱している（OECD, 2010）。

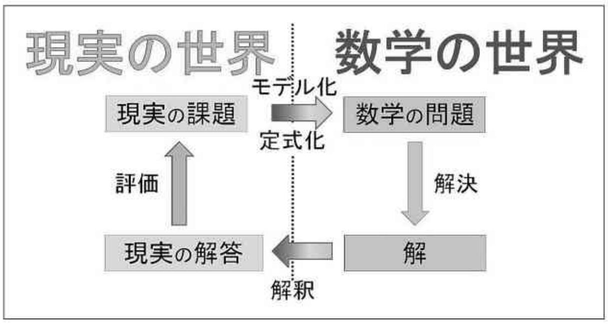

図１．数学的プロセス

まず，現実世界の課題として問題を設定する。次に，その問題に対して，定式化・モデル化を行い数学の問題へと変換する。そして，数学の公式や定理を適用し，解決することで数学の解を導く。ここで導かれた解に解釈を加えることで,現実の文脈に即した解を得る。最後に，文脈に即した解が最初に設定した問題の解となっているかを評価する。この流れに沿って現実と数学の世界との往還を行うことを数学的活動と捉え，このような授業を行うことは，生徒が数学を学ぶことの楽しさや有用性を感じられる契機にもなると考える。

PISA2012 調査では，数学的リテラシーに関して，日本の平均点は 536 点と OECD 平均の 494 点より上位の結果であったものの，質問紙調査においては情意面に関

して OECD の平均を大きく下回る結果が示された（国立教育政策研究所，2013）。この情意面に関する調査結果は，2003 年から 2012 年までにいくらか改善しているが，小寺（2007）が「日本の子どもたちは数学の知識や技能の面では世界トップでありながら，数学への興味も応用への関心も乏しい」と指摘するように，子ども達の数学に対する興味・関心を高めていく対策を講じる必要がある。

そこで我々は，「どのような授業によって，生徒に数学における興味・関心の向上を促すことができるか」という課題を設定し,それを解決するために「数理ゲーム」を題材として教材開発を行った。次に数理ゲームについての説明とその扱い方について述べる。

1.2　数理ゲーム

本稿における数理ゲームとは，数学的な思考を用いて取り組むゲームのことを指す。これまで様々な数理ゲームが「数学遊戯」として秋山・中村（1998）などにより研究がされてきた。数理ゲームには数学的な側面のみではなく，遊びとしての面白さが潜んでいる。この面白さと数学的な性質を授業において相互に関連づけることにより，子ども達に数学に対する興味・関心の向上を促すことができると考える。

また，高等学校学習指導要領においても「数学活用」の科目では，数学的活動や思索することの楽しさなどに焦点を当てることが企図されている。ここで目標とされている，「数理的なゲームやパズルなどを通して論理的に考えることの良さを認識し，数学と文化のかかわりについて理解する」（文部科学省，2009）という観点から見ても，数理ゲームは我々の設定した課題を解決することが期待され，数学的に価値があるものであることがわかる。

今回我々が取り上げた数理ゲームの教材化では，現実世界の事象を，数学を活用して考察できることを実感できるような授業として構成することを留意した。数理ゲームを題材とする数学的活動を，数学的プロセスの中に位置づけ，特に数学的にモデル化された問題を数学的に「解決」し，得られた数学的な解に「解釈」を加えて現実に即した解を得る過程を重視した。

2．教材開発・授業実践および省察

今回教材として提案するのは「ハノイの塔」「帽子のパズル」「モンティホール問題」「ISBN」の 4 つである。それぞれ藤田，竹内，土田，間庭が教材の研究と実践を行った。本研究では,数理ゲームを題材として取り上げ,ゲームに潜む数理を捉える過程で，数学的な思考や既習知識の活用を促すような問題設定を行い，授業の構成を数学的プロセスに位置付けることを意識して教材開発を行った。

2.1　ハノイの塔（藤田）

本実践は 2016 年 3 月 15 日に福井県立丸岡高等学校 2 年 1 組普通科の男子 25 名，女子 10 名の合計 35 名を対象に，高等学校数学 B「数列」の通常授業のうちの1コマ（45 分）として行った。なお，扱っている教科書は数研出版「新編 数学 B」（大矢ほか，2012）である。

このクラスは普通科の理系クラスであるため，授業での数学に対する意欲は高く，疑問に思ったことに対し積極的に発言をする姿勢が見受けられる。授業実践では生徒たちの意欲的な姿勢を積極的に利用し，「ハノイの塔」を題材に，具体的な操作を通して数列の漸化式について体験的・視覚的に理解することを目標とする。

2.1.1　ハノイの塔

ハノイの塔とは，1883 年にフランスの E. リュカが発明したゲームである。図 2 のように 3 本の棒のうち 1 本に円盤が大きいものから順に重ねられている。この円盤をルールに従って動かし，他の棒に移動させるゲームである。ルールは，以下の通りである。

図2．ハノイの塔

1. 1回に動かせる円盤は1枚である。
2. 大きな円盤を小さな円盤の上に重ねることはできない。

表1．円盤の枚数と最小移動回数の関係

円盤の枚数	1	2	3	4	…	n
最小移動回数	1	3	7	15	…	a_n

円盤が n 枚のときの最小移動回数を a_n と表すと，$a_n = 2^n - 1$ であることが知られている（表 1）。本実践では数列 1，3，7，15，…の一般項を求めるために，階差数列を用いる方法と漸化式を用いる方法との 2 つの解法を考える。

ハノイの塔を用いた数学の授業は，これまでにも多くの先行研究があり，ハノイの塔が掲載されている数学の教科書もある。啓林館「数学 B」（高橋，2012）では，漸化式の導入としてハノイの塔が扱われており，また啓林館「数学活用」（根上，2012）では，ハノイの塔の最

小手数の数学的帰納法による証明や，状態推移図が解説されている。

2.1.2　授業構成

本時の内容は数学Bにおける漸化式の応用として位置づけた。本時の目標は，次の２つである。

1. ハノイの塔を利用して，階差数列や漸化式について考えようとする。
2. ハノイの塔の最小移動回数の数列に関して，階差数列の式や漸化式を立て，移動回数の一般項を求めることができる。

本時の時点では，数学的帰納法が未習であることや生徒の習熟度などを考慮し，階差数列や漸化式を用いてハノイの塔の移動回数の一般項を導くことのみを目指す。その回数が最小になることの証明は，数学的帰納法の学習時に扱う構成であるため、本時ではクラス内で最小回数で演示できたものを最小回数としている。

本授業は数学的プロセスに基づいて展開を構成した。「ハノイの塔を移動させる」という現実の問題に対し，「円盤がn枚のハノイの塔の最小移動回数 a_n の一般項を求める」という数学の問題を抽出する。この問題に対して，階差数列や漸化式を用いて $a_n=2^n-1$ という解を得て，最後に解釈・評価として，得られた解をハノイの塔を実際に操作することによって実証する。

2.1.3　授業実践

はじめに，ハノイの塔についてのルールを説明し，円盤が１枚から３枚までの最小移動およびその回数を教師が黒板上で演示した（図3）。

図３．授業風景１

次に，生徒一人一人に図４に示したワークシートと，円盤を正方形の紙で見立てたハノイの塔を配布して，実際に生徒にワークシートの上で動かして，円板が４枚のときの移動回数を調べさせた（図５）。

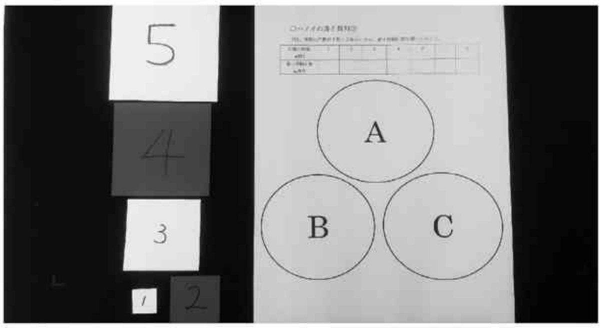

図４．配布したワークシートとハノイの塔

円盤の移動に関して難しさを感じている生徒はおらず，ほとんどの生徒が最小移動回数の15回，もしくは次に少ない17回で移動させることができていた。生徒を一人指名して，黒板で演示をさせ，15回が最小回数であることを共有した。

図５．授業風景２

次に５枚のときの最小移動回数を推測し，なぜその回数になると思うのか，理由を含めて述べてもらった。

生徒の予想は31回で全員一致したが，５枚のときの最小移動回数を31回と推測した理由を生徒に聞くと，主に2つの考え方が出た。１つ目は，最小移動回数の数列1，3，7，15，… の階差を取ると，2，4，8，… と2の累乗の階差数列であるので，４枚と５枚の間には16回の差があると推測し，５枚の移動回数は15＋16＝31回であるという考え方であった。クラスの大半の生徒はこの考えであった。2つ目は，最小移動回数の数列1, 3, 7, 15，… の連続する2つの項の関係が，前の項に2をかけて1を加える関係であるので，５枚目の移動回数は15×2＋1＝31回であるという考えであった。後者の考え方をしたのはクラス内で２人しかいなかった。

そこでn枚のときはどうなるのかと発問をして，次の課題を提示した。

円盤がn枚のときの最小移動回数a_nを求める

n枚のときを考える上でn＝5で推測した考え方を数

式に表すことができないかと発問したが，数式を立てた生徒はいなかった。そのため，1つ目の考え方は階差数列，2つ目の考え方は漸化式であると教師が補足をし，再びこの2つの考えを式にするとどうなるかという問いかけをした。この問いかけに対し生徒たちは，2つの式を立式し，解きやすい方を自ら選択して一般項 a_n を求めることができた。

1．階差数列を用いた式およびその解法
階差数列は $b_n = 2^n$ より，
一般項 a_n は $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$$

$$= 1 + 2(2^{n-1} - 1) \quad \text{（等比数列の和）}$$

$$= 2^n - 1$$

$n = 1$のとき$a_1 = 2^1 - 1 = 1$より成立する。

2．漸化式を用いた式およびその解法

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 ,\ a_1 = 1$$

これを変形すると，
$a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$
$a_n + 1 = b_n$とおくと$b_1 = 2$
$b_{n+1} = 2b_n$
つまり数列 $\{b_n\}$ は初項2，公比2の等比数列であるので，$b_n = 2^n$ である。
$a_n + 1 = b_n$ より，$a_n = 2^n - 1$

最後に，求めた解 $a_n = 2^n - 1$ が実際の解と合っているのかを，推測した n=5 のときに $a_5 = 31$ であることを確認し，31 回を実際にハノイの塔を移動させることで実証するところまでが本時の内容であったが，時間の関係でこの活動は行うことができず，各自で空いている時間を利用して確かめてみようと伝えて授業を終えた。

2.1.4　考察

授業を終え，参観してくださった高校の先生方や大学院生との研究協議や助言により，大きく3つの反省点が挙げられた。

（1）最小であることに納得がいかない生徒がいる。
（2）実証の全体共有がほしい。
（3）ハノイの塔で自由に遊ぶ時間がなかった。

（1）に関しては，数学的帰納法を用いて今後の授業で証明する構成であったが，本実践自体を，数学的帰納法を扱った後で行った方がよかったと考える。生徒の中には「なんでこの数が最小になるんや」という声をもらすものもおり，クラスの中で最も少ない回数で移動できた回数を最小と確認するだけでは納得できない生徒がいることがわかった。

（2）に関しては，時間の関係で実証を行うことができなかったのだが，実証の時間を確実に確保するための授業時間の構成について課題が残った。

（3）に関しては，本時ではハノイの塔の最小移動回数に関して取り上げたが，動き方などにも性質があり，それに生徒が気付くことで，より多くの考え方ができるのではないかと考える。

授業後に実施したアンケートの結果を示す（表 1，2）。

表1．アンケート結果1

この授業を通して，数学に興味を持ったか。	
あてはまる	15人（46.9%）
ややあてはまる	17人（53.1%）
ややあてはまらない	0（0%）
あてはまらない	0（0%）

表1より，クラス全体の 100%（32 人中 32 人）の生徒があてはまる，ややあてはまると解答していることから，この実践を通して生徒に数学への興味を持たせることのできる教材であったと考えることができる。

表2．アンケート結果2

この授業を通して，自分が持っている数学の知識を使うことが得できたか。	
あてはまる	13人（40.6%）
ややあてはまる	13人（40.6%）
ややあてはまらない	6人（18.8%）
あてはまらない	0人（0%）

また表2より，クラス全体の約 81%（32 人中 26 人）の生徒があてはまる，ややあてはまると解答していることや，ほとんどの生徒がワークシートに階差数列または漸化式を用いて立式できていることから，本時の目標である「ハノイの塔の最小移動回数の数列に関して，階差数列の式や漸化式を立て，移動回数の一般項を求めることができる」は十分達成できたと考える。

また自由記述の欄には，「数学はいろいろな考え方があっていろいろな導き方があることはおもしろいことだと思いました」という意見もあった。2つの解法を用いて一般項を求めたことで，解法の多様さに対しても興味を持たせることができたと考える。

以上のことから，ハノイの塔を題材とした本実践は，生徒の数学に対する興味・意欲を喚起することができたこと，またハノイの塔を用いることにより，現実と数学のつながりについて，実感を伴った形で理解が深まったことも成果として挙げられる。

2.2　帽子のパズル（竹内）

本実践は 2016 年 2 月 27 日に福井市光陽中学校3年生 34 名を対象に，土曜日に行っている補習の授業時間に，1コマ（60 分）の特別授業として行った。今回授業に参加した生徒は，既に私立高校の推薦入試を合格しており，

数学の得手不得手は様々であるが，授業を受ける姿勢は意欲的である。

帽子のパズルは数学的な思考を必要とする論理パズルである。普段生徒たちの学ぶ数学の印象とは大きく異なるが，パズルを解く論理的な思考の中に数学の考え方が潜んでいることを実感することができると考え，これを題材として取り上げ，授業実践を試みた。

2.2.1　帽子のパズル

帽子のパズルとは，論理パズルの1種で，それぞれお互いにかぶっている帽子の色をもとに自分のかぶっている帽子の色を当てるというものである（ガードナー，1992)。パズルを解くにあたって，解答者が予め知り得ている情報は，赤･白いずれかの帽子（以下，赤帽子をR，白帽子をWと表す）をかぶるということと，帽子がそれぞれいくつあるかということである。この時，以下の条件が課されている。

a. 他人の帽子の色は分かる（自分の色は分からない)。
b. 他人の帽子の色を口にしたり，自分の帽子の色を他の人に確認したりするのはNG。
c. 1人ずつ順番に自分の帽子の色が「わかった」か「わからない」か発言し，その発言をもとに帽子の色を推察する。

例えば，教師と生徒（a）の２人でこのパズルを行う場合のゲームの流れは，図６で表される。この場合，使われる帽子はR×2，W×1とする。

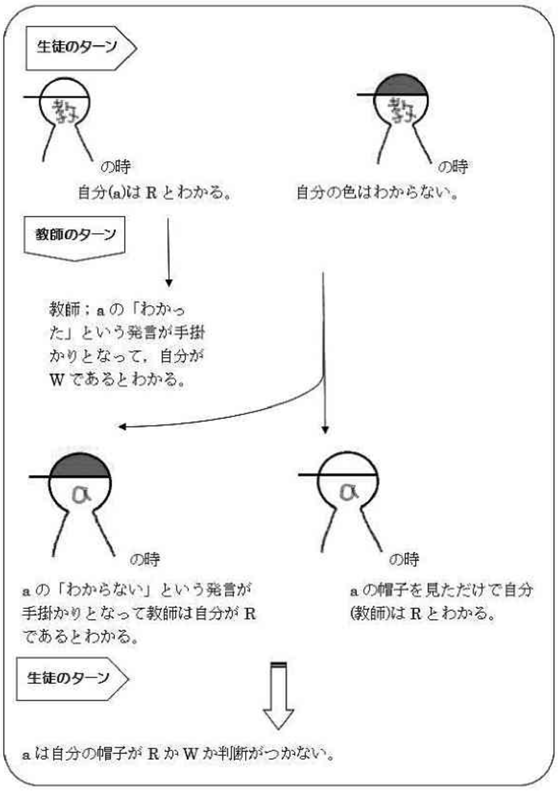

図６．帽子のパズル（２人ver.）

はじめに生徒のターンとする。教師のかぶっている帽子がWである場合，使われる帽子はR×2，W×1に限られることから，生徒（a）は自分のかぶっている帽子はRであると即座に判断することができる。

教師の帽子がRであった場合は，この時点では自分(a)の帽子はRともWとも判断はつかない。そのため，aは「わからない」と答えるしかない。次に教師のターンとなる（条件cによる)。教師から見ると，aの帽子がWの場合は，aの「わからない」という発言以前から自分（教師）の帽子がRであることはわかっていた。aの帽子がRの場合は，aの発言がなければ，自分（教師）の帽子を知る手掛かりはないが，もしaが「わかった」と答えたなら，それは自分（教師）の帽子がWであることを意味し，aが「わからない」と答えたなら，自分（教師）の帽子はRであると判断できる。いずれの場合にも教師は「わかった」と答えることになる。

次に生徒の２回目のターンとなるが，教師の「わかった」という発言は，初めからわかっていたのか，aの1回目の回答を聞いてからわかったのかを区別する手立てはないので，aは最後まで自分の帽子が分からないままゲームを終えることになる。

この考え方は人数が３人，４人と増えて帽子の個数が変わっても同じように考えることができる。なお，ガードナー（1992）は，このパズルをn人の場合に拡張して数学的帰納法と関連付けて解説しているが，人数が多くなると各人が得られる情報を測ることが，極めて難しくなる。

2.2.2　授業構成

本時の目標として，次の２点を設定した。

- 論理的に考え，消去法を用いて問題を考察することができる。
- 自分の見出した方法や考えを，根拠が伝わるようにわかりやすく表現できる。

帽子のパズルは数学的プロセスにおける「現実の問題」がパズル（数学の問題）として初めから定式化されていると考えられ，主に「解を得る」過程と，得られた解の「解釈（吟味)」に焦点を置いた授業を構成した。

生徒たちは，パズルに潜む数理についての理解を深める活動を行うことで，数学的な力を身に着けることができると考える。この時，「どのように考えると辻褄が合うか」を互いに話し合わせることで数学的な思考を促すのが狙いである。論理パズルでは，この「数学的な思考」を行うきっかけとして有意な影響を与えるものと捉えている。

2.2.3　授業実践

今回の実践では，２人ver.の説明でルールと考え方の確認を行い，３人ver.をグループで実験させる授業構成

を考えた。ここで，２人・３人 ver. の考え方の説明は，野崎・安野（1984）の絵本を参考にした。

始めに，今回の授業では「帽子のパズル」を取り上げることを伝え，ルールの説明を行った。まず帽子の数が R×2，W×1 の２人 ver. を，２人の生徒に前に出て演示の手伝いをしてもらいながら，クラス全体にパズルの流れを示した（図7）。ここで，帽子のパズルを考える際に「配られる帽子の色」，「色ごとの帽子の数」が知り得る情報として必要になることを確認した。

図７．帽子のパズルの説明

そして次にグループワークとして，生徒らに３人 ver. の帽子のパズルに取り組んでもらった。今回の授業では４人班を構成し，帽子を配る１人と帽子をかぶる３人を分担するよう指示した。この時，配られる帽子は R×3，W×２の５つである。今回の実践を行うにあたって，教具として，帽子のイラストが描かれたカードを用意した。カードは，帽子のイラストが描かれた画用紙をプラスチックケースに入れて作成した。このカードを図8のように自分には見えないよう頭上に掲げ，帽子をかぶっていると想定して，パズルを考えさせた。

図８．各班で帽子のパズルに取り組む

ここで，３人でパズルを行う場合のゲームの流れは以下の通りである。a，b，c の３人が帽子をかぶり，a，b，c の順に答えるとする。b，c のかぶっている帽子が共に W である場合，a は自分（a）のかぶっている帽子は R であると即座に判断することができる。

一方 b，c のいずれかが R の帽子をかぶっている場合は，a は「わからない」と答えるしかない。次に b のターンとなる。b から見ると，a と c が W の場合は，a の「わからない」という発言以前から自分（b）の帽子が R であることは既にわかっていた（a:W，b:R，c:W）。また，a が R，c が W の場合，a が「わかった」と答えたなら自分（b）は W であり，a が「わからない」と答えたなら自分（b）は R であると判断できる。一方，a が W で c が R の場合,a が「わからない」と発言しても b は自分（b）の帽子の色を決定することはできない。また，a と c が R の場合も同様に b は「わからない」と答えるしかない。

そして c のターンに移る。もし自分のターンまでに a か b どちらかが「わかった」なら自分（c）は W と判断でき，a も b も「わからなかった」なら自分（c）は R と決定することができる。この時，c は a，b の帽子が見えていなくてもよく，a，b の発言だけから自分（c）の帽子を判断することができる。

1回のゲームが終わるごとに，生徒には「どうして自分の帽子の色を当てることができたのか」をお互いに説明させた。その際，パズルが解けた生徒からどう考えると帽子の色が分かるかを聞くことで，解けなかった生徒の理解を助けるという場面が見られた。またこの時，生徒らは検討しながら自然に，「○○（生徒名）の発言を聞いてわかった」，「それを聞いて（自分の帽子の色が）わかった」と鍵になった情報を交換するなど，各場合どのように考えると正解できるかを積極的に検討している様子が見られた。

班ごとに帽子のパズルを 20 分ほど行った後，自分の解答順が一番最後の人（c）の思考プロセスについて全員で検討した（図 9）。

この時，生徒はワークシートに沿って想定される場合を検討していった。このワークシートにそれぞれの場面における帽子のパターンを記入することで，帽子のパズルの「早見表」が出来上がる。

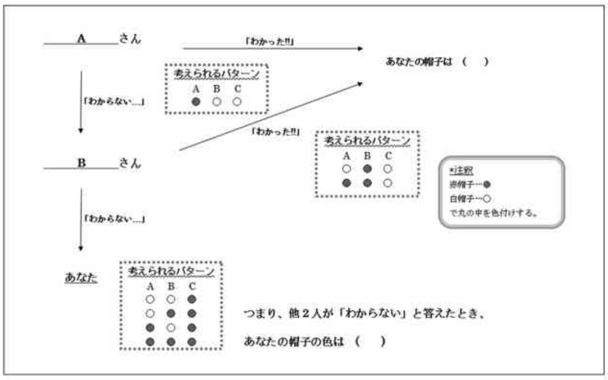

図９．思考プロセスの検討

最後にまとめとして，改めて今回帽子のパズルに取り組んでもらった意図を説明し，帽子のパズルに数学がどうかかわっていたか，数学をどう生かすことができるかを生徒に伝え，本時の授業を締めくくった。

2.2.4　考察とアンケート結果

生徒に対して行ったアンケートの結果をもとに，本実

践について検討する。

まず,「授業を受けて，興味を持てる内容だったか」という質問に対して，表３のような結果が得られた。

表３．アンケート結果１

興味を持てる内容でしたか？	
1. たいへん興味を持てた	30 人（88.2%）
2. 少し興味を持った	4 人（11.8%）
3. あまり興味を持てなかった	0 人（0.0%）
4. まったく興味を持てなかった	0 人（0.0%）

集計の結果，クラス 34 名すべての生徒が「たいへん興味を持てた」,「少し興味を持てた」と回答していることから，帽子のパズルは興味を喚起させる題材であると考えることができる。

次に,「帽子のパズルに取り組んでみて，論理的な思考ができたか」という質問については表 4 のような結果となった。

表４．アンケート結果２

パズルに取り組んでみて， 論理的な思考ができたと思いますか?	
1. できたと思う	22人（64.7%）
2. 少しできたと思う	11人（32.4%）
3. あまりできなかったと思う	0人（0.0%）
4. できなかったと思う	0人（0.0%）
5. 無回答	1人（2.9%）

無回答が 1 名いたものの, クラスのほとんどの生徒が，肯定的な評価をしたことから，本時のねらいとして設定した「論理的に考え，問題を考察することができる」という目標は達成されたと考える。

自由記述欄に上がった生徒の意見としては次のようなものがあった。

・ゲームとして考えていったので楽しみながらできました。
・初めは，難しいと思っていたけど，相手の言葉をヒントにして考えるとわかったので，とても楽しかったです。また，やってみたいと思いました。
・いつもの授業のように書いて考えるのではなく，頭の中で考えて，なんでそうなるのか考えるのが楽しかったです。

以上のことを踏まえて，今回取り上げた帽子のパズルは数学的リテラシーを育む授業として有効であると結論付けられる。生徒からの自由記述には「数学に楽しく取り組めた」「論理的に考えることができた」「今回の考え方を生かしたい」というような肯定的なものが多数あり，数学に対する積極性を培うことにもつながったと考える。

2.３　モンティホール問題（土田）

モンティホール問題とは，モンティホール・ジレンマとも呼ばれ，モンティホールが司会を務めるアメリカの TV 番組「Let's make a deal」の中で行われたゲームに関する論争に由来している（ローゼンハウス , 2013)。このゲームでは，3 つのドアから 1 つの当たりのドアを当てるのだが，司会者がはずれのドアを開けて見せた後に, 最初に選んだドアを変更することが出来る。この時, ドアを変更してもしなくても当たる確率は同じであると多くの人が間違った考え方をしていたため，数学者をも巻き込んだ議論に発展した。このような直感的確率が実際の確率と食い違いがあり，数学の楽しさが実感できるような教材開発を意識した。

2.３.１　授業構成

高校数学 A「場合の数と確率」の単元において，モンティホール問題を題材とした条件付き確率の授業を，1 時間（50 分授業）構成で考えた。モンティホール問題を取り入れた確率の授業は，多くの先行実践がある。山本（2011）では，中学生を対象に，モンティホール問題を題材にして，実験を行って確率を確認し，樹形図を用いて説明する確率の授業が提案されている。本実践では, 高校生を対象に, 条件付き確率の導入としてモンティホール問題を取り入れて，生徒の興味関心を引き出すことを狙いとする指導案を考えた。

この授業を通して, 数理ゲームに関する現実の事象を, 確率を用いて考察することで，数学的に判断する力や, 数学的に考えることの良さを感じてほしいと考え，次の 2 点を学習目標とした。

2.３.２　授業実践

本実践は 2016 年 3 月 16 日に福井県立藤島高等学校 1 年 3 組の生徒（38 名）を対象に数学 A の課題学習として行った。実践時に確率の単元は学習済みである。

・数理ゲームに関する現実の問題を考えることによって，条件付き確率を理解する。
・身近な現象について確率を用いて考えることにより，数学的な見方や考え方，数学のよさを認識する。

はじめにモンティホール問題の設定を提示した（図 10)。生徒から「その問題知っている」との声もあがったが，ほとんどの生徒は初めて考える問題であった。生徒を一人指名して，プレイヤーとなってもらい，教師が司会者役となって大きなトランプ 3 枚を使って，実際にこのゲームを行って，全員にルールを確認させた。

（問題1）
　プレイヤーの前に3つのドアがあり，1つのドアの後ろには景品の新車が，2つのドアの後ろにはヤギ（はずれを意味する）がいる。プレイヤーは新車のドアを当てると新車がもらえる。プレイヤーが1つのドアを選択した後，当たりを知っている司会者が残りのドアのうちヤギがいるドアを開けて見せる。ここでプレイヤーは最初に選んだドアを開けられていないドアに変更してもよいと言われる。あなたなら，ドアを変更しますか？

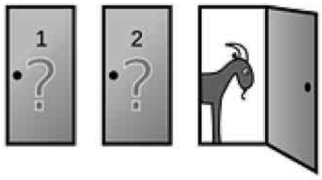

図10．モンティホール問題

　この問題では，直感的な確率と実際の確率を誤解しやすく，生徒にとって驚きや新たな発見につながると考え，直感ですぐに選択肢を選んでもらった。その結果，「ドアを変更しない」を選ぶ生徒が半数以上見られた。

　次に，実際の確率を確かめるためにトランプを使った実験を行った。実験は２人１組になって，司会者とプレイヤーに分かれて行わせた（図 11）。トランプ３枚（絵札１枚，数字札２枚）を使い，司会者はトランプをシャッフルした後，裏向きに机の上に並べる。その中からプレイヤーはトランプを１枚選ぶ。司会者は選んでいないトランプの中からはずれ（数字札）のトランプを表にして見せる。そしてプレイヤーに選んだトランプを変更する場合としない場合で，当たり（絵札）を引くかどうかを記録する。これを前半の５回を変更あり，後半の５回を変更なしに固定して 10 回繰り返させた。実験の結果を表5に示す。

図11．実験の様子

　その結果当たった割合は，変更した場合は約 2/3，変更しない場合は約 1/3 となり，変更する方が約２倍当たりやすいことが確認出来た。そこで，問題（2）を新たに提示した。

表５．実験の結果

	変更しない	変更する
当たり	34	61
はずれ	61	34
合　計	95	95

（問題2）
なぜ変更した方が当たりやすいのだろうか。

　はじめに選んだドアを変更する場合と変更しない場合，それぞれについて，当たりを引く数学的な確率を求め，変更した方が当たりやすい理由を考えさせた。すべての場合を樹形図に書き出して考える生徒や，変更して当たるためには，最初にはずれのドアを選べばよいことに気付く生徒もいた。また，変更なしで当たるには，最初に当たりのドアを選ぶ必要があるので，３分の１の確率で当たる。生徒の考えを発表させて，生徒同士で共通理解が出来るようにした（図 12）。

図12．生徒の発表の様子

　最後にこの問題がモンティホール問題という名前がついている由来を説明して，新たに病気の検査に関する条件付き確率の問題を提示した。

（問題3）
　ある病気にかかっているか判定する検査について考える。この病気は1万人に一人がかかる病気である。「病気の場合，陽性と判定する確率」，「病気でない場合，陰性と判定する確率」はともに99.9%である。
（1）この検査を受けて，陽性と判断される確率を求めよう。
（2）陽性と判断された場合，本当に病気にかかっている確率を求めてみよう。

　解答． 陽性となる事象をA，病気となる事象をBと表すと，（1）（2）で求める確率はそれぞれ，P(A),

$P(B|A) = P(A \cap B) / P(A)$ である。ここで各事象の確率は表6で表される。

表６．病気の検査問題

	陽性(A)	陰性($\bar{A}$)	合計
病気 ($\bar{B}$)	$P(A \cap \bar{B})$ $\frac{1}{10000} \times 0.999$	$P(A \bar{\cap} \bar{B})$ $\frac{1}{10000} \times 0.001$	$P(\bar{B})$ $\frac{1}{10000}$
病気でない ($\bar{B}$)	$P(A \cap \bar{B})$ $\frac{9999}{10000} \times 0.001$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ $\frac{1}{10000} \times 0.999$	$P(\bar{B})$ $\frac{9999}{10000}$
合計	P(A)	$P(\bar{A})$	1

(1) は，病気 (B) で陽性になる時と，病気でなくて($\bar{B}$)陽性になる時があるから，

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$
$$= \frac{1}{10000} \times 0.999 + \frac{9999}{10000} \times 0.001$$
$$= \frac{10.998}{10000} \fallingdotseq 0.0011$$

よって，約 0.11%の確率である。

(2) は，陽性（A）の条件の下で病気（B）の条件付き確率 $P(B|A)$ を求める。

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{0.999}{10000}}{\frac{10.998}{10000}} = \frac{0.999}{10.998} \fallingdotseq 0.091$$

よって，約 9%の確率である。

この問題は，条件付き確率の問題を解く際に，どの事象を A，B として，$P(B|A)$ を求めればよいかを読み取れるか確認するために扱った。生徒の様子を見ると，2つの事象を，陽性（A）と病気（B）と表すことが出来た生徒が少なく，$P(B|A)$ の定義を理解している生徒も少なかった。そのため，教員主導で黒板に表3のような考え方を示し，解法を説明した。

2. 3. 3　考察

授業のはじめの導入で，モンティホール問題のゲームを実際に行ったことで，普段の数学の授業と違い，積極的に参加する姿がみられ，興味関心を引き付けられたと考える。また，トランプを使った実験を行ったことで，ルールの理解につながり，数学的な見方・考え方に気付くきっかけになったのではないかと思う。授業後の生徒のアンケートからは，「ゲームを取り入れて実際に自分たちでやってみたので，とても理解しやすかったし，面白かったです。」や「配られる紙の中に，問題に対する解答をのせずに僕達に説明の時間をくれたことはとてもありがたかったです。また，今回の授業で数学の実験も大事だなと感じました。」という肯定的な感想が見られた。

一方で，病気の検査問題では，どのように場合分けを行って解いていけばよいのかわからず，手が止まってしまっている生徒が多く見られた。条件付き確率について理解を深めるためには，教師が理論的な考え方を説明するだけでなく，生徒が自分たち自身で実験の手順や方法を生徒に考え，結果をまとめていくことも重要だと考えた。

今回の授業では，単発(50 分×1)の授業であったため，直感と実際の確率の違いを体験させて，数学の楽しさや面白さを感じてもらうことを優先した授業構成を考えた。そのため，条件付き確率については理解を深めることが出来ず，問題 3 の解決には繋がらなかったものと思われる。問題 2 に対して，モンティホール問題を条件付き確率を使って説明し，全体で共有することが必要であったように思う。

2. 4　ISBN（間庭）

ISBN（国際標準図書番号：International Standard Book Number）は，書籍出版物の書誌を特定するための世界共通の番号であり，13 桁のコード番号によって表される。

ISBN の教材化について，中学校数学においては，方程式の応用としての実践が提案されている（大澤 2007）。また，現行の指導要領から数学 A に設定された「整数の性質」の単元には，発展的な内容として「合同式」を載せている教科書もあり，合同式の応用として ISBN を扱った実践も提案されている（長尾，2010）。

今回の授業実践は，長尾（2010）の提案する授業を，“数当てゲーム”という形式を取り入れて行ったものである。

2. 4. 1　ISBN とチェックディジット

数研出版「数学 A」の教科書（坪井ほか，2011）の ISBN「978−4−410−80117−4」を例にとり，コード番号について説明する。左から 3 桁の接頭数字「978」は BOOKS（書籍・図書），4 桁目の「4」は日本（国記号）を表し，日本国内で発行する書籍に付与される記号である。その次の「410」は出版者（数研出版）を表し，「80117」は出版者が発行する固有の書籍出版物を識別する要素である。最後の「4」は「チェックディジット」と呼ばれるものである。

ISBN978-4-410-80117-4
接頭数字−国−出版者−書名−チェックディジット
※各要素の桁数は，地域や出版者によって変化する。

チェックディジットは，13 桁の ISBN では次のように決められている。

左から i 桁目を a_i と表すと，

$$\sum_{i=1}^{7} a_{2i-1} + 3\sum_{i=1}^{6} a_{2i} \equiv 0 \pmod{10}$$

を満たすように a_{13} を定める。

このようにチェックディジットを決めることで，読み取りや入力などの際に起こる番号の間違いをある程度防ぐことができる。なお，ISBN が 13 桁になったのは 2007 年からであり，2006 年までは 10 桁のものが使用されていた（現在でも両方を併記して使用することがある）。10 桁の ISBN には書籍を表す接頭数字「978」がなく，末尾のチェックディジットは次のように決められている。

左から j 桁目を b_j と表すと，

$$\sum_{j=1}^{10} j \cdot b_j \equiv 0 \pmod{11}$$

を満たすように b_{10} を定める。
ただし，$b_{10}=10$ の時は $b_{10}=X$ と置き換えて表記する。

いま，ISBN「978−4−410−80117−4」の左から 8 桁目の「8」が分からないとする。8 桁目を「x」とおき，先ほどのチェックディジットの計算式に代入すると，

$$\begin{aligned} &9+1+8+2+4+3+0+3x+0+3+1+1+4 \\ &\equiv 3x+6 \equiv 0 \pmod{10} \\ &\Leftrightarrow 3x \equiv 4 \pmod{10} \end{aligned}$$

という式が得られる。この式を満たす $x(0 \leqq x \leqq 9)$ を考えると，$x=8$ が見つかる。このようにして，ISBN コードは分からない数字が1桁あっても，その数字を当てることができる（10 桁の ISBN コードにおいても同様にして数字を当てることができる）。

2.4.2　授業構成

数学 A「整数の性質」の単元において，ISBN コードを用いた“数当てゲーム”を主軸とした1時間の授業を構成した。この授業における本時のねらいは次のように設定した。

身近な書籍に付与されているISBNコードを使った数当てゲームをするなかで，合同式を活用して，合同式を用いることの実用性・有用性を実感させる。

また，評価の観点として，

- 身近な書籍に付与されている ISBN に興味を持つ
- ISBN のチェックディジットの計算を合同式を利用して行うことのよさを理解している
- 整数の性質を活用して数当てゲームができる

を設定した。評価方法は，授業中に配るワークシートの記述の度合いと授業後のアンケートによる。

2.4.3　授業実践

2016 年 3 月 16 日に福井県立藤島高等学校1年 6 組（37 人）の生徒を対象に，数学 A「整数の性質」の単元の課題学習として 50 分の授業を行った。

まず，身近にある本の ISBN に注目させた。その後，ISBN の1桁を隠したものを生徒に教えてもらい，2.4.1 に示した方法で授業者が隠した1桁を当てるという簡単な“数当てマジック”を披露して導入とした。

次に，スライドと黒板を用いて ISBN の概要とチェックディジットの定め方を確認し，マジックの種明かしをした。なお，チェックディジットの定め方は定義式を見せるのではなく，具体的な数値を用いて計算方法を伝えた（図 13）。

図13．授業で使ったスライドの一部

その後，隣同士で ISBN を使った数当てゲームをしてもらった。計算ミスをしている生徒もいたが，生徒のほぼ全員が数を当てられた（図 14）。

図14．授業風景１

次に，10 桁の ISBN の説明を行った。日本で出版された書籍に付与されている 13 桁の ISBN は，以下の手順で 10 桁の ISBN に変換できる。

例． ISBN「978-4-410-80117-4」（13桁）を10桁に変換する方法
手順１：接頭数字（978）とチェックディジット（4）を消去する→「4-410-80117」
手順２：残った数字を新たに左から $b_1, b_2, \cdots, b_9$ として，10桁のISBNの計算式に当てはめてチェックディジット b_{10} を計算する（b_{10} は x と置いておく）。

表７．計算表

ISBN	4	4	1	0	8	0	1	1	7	x
重み	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
×	4	8	3	0	40	0	7	8	63	$10x$
mod 11	4	8	3	0	7	0	7	8	8	$10x$

$$4+8+3+0+7+0+7+8+8+10x$$
$$\equiv 10x+1 \equiv 0 \pmod{11}$$
$$\Leftrightarrow 10x \equiv 10 \pmod{11}$$

この式を満たす $x\,(0 \leqq x \leqq 10)$ を考えると，唯一つの解 $x=1$ が見つかる。
手順３：求めた x を手順１の右端（10桁目）におけば完成→「4-410-80117-1」

この手順を，生徒たちには黒板上で説明した（図 15）。

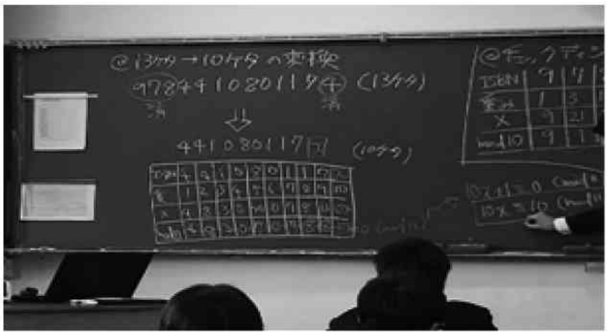

図15．授業の板書の一部

その後，生徒の手元にある 13 桁の ISBN を 10 桁に変換させて，1人の生徒に前に出て計算手順を発表させた。ここでも計算ミスをする生徒はいるものの，やり方が分からないという生徒は見受けられなかった。

ここまでを終えて，13 桁の数当てゲームの時も，13 桁→ 10 桁の変換時のチェックディジット決定の際にも「なぜ，答えがいつでも1つに決まったのか？」という疑問を提示した。その答えとして，次の定理が数学Ａで学ぶ整数の性質から導かれることを紹介して，ISBN は「整数の性質」に支えられているということを伝えた（坪井ほか，2011）。

定理１． a, b, m は整数で $m>0$ とする。a と m は互いに素であるとき，
$$ax \equiv b \pmod{m}$$
を満たす整数 x が mod m で唯一つ存在する。

授業の最後に，「チェックディジットは，計算方法は異なるが，ISBN だけでなく学生番号や受験番号にも付与されていて，誤入力や偽造の検知等に役立っています」と言い，「整数の性質」の有用性を強調して授業を締めくくった。

2.4.4　評価と考察

授業後にアンケートを実施した。なお，無回答者が 2 人いて，回答者は 35 人である。難易度と題材についての興味を尋ねた結果は以下の通りである（表 8，9）。

表８．アンケート結果

あなたにとって，今回の授業の難易度は?	
難しすぎる	0人（0%）
難しい	0人（0%）
ふつう	20人（57.1%）
易しい	15人（42.9%）
易しすぎる	0人（0%）

表９．アンケート結果

あなたにとって，今回の授業で扱った「ISBN コード」に関する内容は？	
非常に興味深い	3 人（8.6%）
興味深い	22 人（62.8%）
ふつう	7 人（20.0%）
あまり興味深くない	3 人（8.6%）
つまらない	0 人（0%）

表 8 より，半数近くの生徒が授業の難易度を「易しい」と感じており，また表 9 より多くの生徒が ISBN コードに対する興味を持って授業を受けていたことが分かる。また，自由記述欄には，

・意外に身近なところで「整数の性質」が使われていて驚きました
・整数の分野に対し苦手意識があったが，おもしろさを感じられよかった

などの肯定的な感想が多数みられ，

・ゲーム感覚でできて楽しかったです

という感想もあった。一方で，表 9 において「あまり興味深くない」と回答した生徒も少数見られる。これは授業者による数当てゲームのルール説明や ISBN についての説明が授業者の説明が冗長になってしまったことが原因であると考えられる。実際，それが原因で手持ち無沙汰な生徒も見受けられた。

３．終わりに

我々は，現実と数学の結びつきや数学の有用性が実感できるような教材を開発することを目的に，今回 4 つの教材を開発し実践を行った。

ハノイの塔の実践では，課題に対して既習知識を使おうとする姿が見られ，生徒自ら課題を解決できた。帽子のパズルの実践においても，論理的に考えることのよさに気付く生徒の姿が見受けられた。題材に興味を持つことによって，生徒が授業の課題を解決しようとする積極的な態度が生まれたのだと考える。モンティホール問題や ISBN の実践においても，生徒が課題に魅力を感じ，興味を持って授業に取り組み，積極的に課題を解決しようとする姿が見受けられた。ここで，4 つの実践に共通していることは，数理ゲームを題材とすることで，生徒が題材事態に興味を持ち，積極的に授業に参加する姿が見られたことである。つまり，我々が設定した「どのような授業によって，生徒に数学における興味・関心の向上を促すことができるか」という課題に対して，数理ゲームを題材とすることにより一定の効果があったといえる。

これらのことから，数理ゲームを題材とする授業の成果として，日本の数学教育の課題である数学に対する情意面の改善が期待でき，それと共に数学の有用性や必要性を生徒が実感しやすいことがわかった。

また，本稿で取り上げた授業は数学的リテラシーを育むという目的にも一定の効果があったといえる。特に，帽子のパズルの実践において生徒からの自由記述で「論理的に考えることができた」「今回の考え方を生かしたい」というような肯定的な意見があり，数学に対する有用性を感じるきっかけになっていると考えることができる。しかし，授業者の技能が未熟であること，また，4 つの実践のうち 3 つが 1 単位時間のみの単発の授業であるため，時間的な制約があったこと，この 2 点において，実践が十分ではない。こうした授業を，カリキュラムの中にどのように位置付けるかという点が課題である。

参考・引用文献

OECD（2010），PISA 2012 MATHEMATICS FRAMEWORK，http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/46961598.pdf

国立教育政策研究所（2012），OECD 生徒の学習到達度調査～ 2012 年調査国際結果の要約～，http://www.nier.go.jp/kokusai/pisa/pdf/pisa2012_result_outline.pdf

国立教育政策研究所（2013），生きるための知識と技能 5　OECD 生徒の学習到達度調査（PISA）2012 年調査国際結果報告書，明石書店 .

前川友樹・石田亜子・桑原佑輔・西村保三・櫻本篤司（2015），数学的リテラシーを育む教材開発―数学教育の現状と課題を捉え直して―，福井大学教育実践研究 40，pp.93-104.

小寺隆幸・清水美憲（2007），世界をひらく数学的リテラシー，明石書店.

秋山仁・中村義作（1998），ゲームにひそむ数理―ゲームでみがこう !! 数学的センス，森北出版株式会社.

文部科学省（2009），高等学校学習指導要領解説　数学編，実教出版株式会社.

古藤怜・正田実編著（1991），新・中学校数学指導実例講座　第 4 巻　数量関係，金子書房，pp.137-156.

一松信ほか（1979），新数学事典，大阪書籍，pp.935-936.

根上生也編（2012），数学活用，啓林館，pp.114-117.

高橋陽一郎編（2012），数学 B，啓林館，p.33, p.45.

大矢雅則ほか 17 名（2012），新編 数学 B，数研出版，pp.87-97.

野崎昭弘，安野光雅（1984），赤いぼうし，童話屋.

マーチン・ガードナー著，一松信訳（1992），数学的帰納法と色つき帽子，『落し戸暗号の謎解き』3 章，丸善出版，pp.49-69.

ジェイソン・ローゼンハウス著，松浦俊輔訳（2013），モンティ・ホール問題　テレビ番組から生まれた史上最も議論を呼んだ確率問題の紹介と解説，青土社.

山本靖（2011），第 2 学年 B 組 数学科学習指導案，http://www.chu.fuzoku.tottori-u.ac.jp/wp-content/uploads/.../H23_kenkyu_2b_sugaku.pdf

大澤弘典（2007），中学数学 生活の中の数学，学校図書 .

長尾良平（2010），余りものには『福』がある，第 73 回数学教育実践研究会レポート，http://izumimath.jp/R_Nagao/isbn.pdf

坪井俊ほか（2011），数学 A，数研出版.

Development of Teaching Materials for Nurturing Student’s Mathematical Literacy,
—Propositions of Four Materials by Using Mathematical Games—

Kousuke FUJITA, Toshichika TAKEUCHI, Eri TSUCHIDA, Akio MANIWA, Yasuzo NISHIMURA, Atsushi SAKURAMOTO, Hiroshi KAZAMA

Key words：mathematical literacy, development of teaching materials, mathematical game